

Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Глазовский государственный инженерно-педагогический университет имени В.Г. Короленко»

Рассмотрено и утверждено на заседании кафедры
Математики и информатики
Протокол № 8 от 24.03.2025

КОМПЛЕКТ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
для проведения промежуточной аттестации в форме дифференцированного зачета по
учебной дисциплине

ОП.08 МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

специальность: 44.02.02 Преподавание в начальных классах

квалификация: учитель начальных классов

Глазов, 2025

Требования ФГОС к образовательным результатам:

<p>В результате освоения дисциплины обучающийся должен уметь:</p>	<ul style="list-style-type: none"> - распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; - анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части; определять этапы решения задачи; - выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы; составлять план действия; определять необходимые ресурсы; реализовывать составленный план; - определять задачи для поиска информации; определять необходимые источники информации; планировать процесс поиска; структурировать получаемую информацию; выделять наиболее значимое в перечне информации; - оценивать практическую значимость результатов поиска; оформлять результаты поиска, применять средства информационных технологий для решения профессиональных задач; - использовать современное программное обеспечение; использовать различные цифровые средства для решения профессиональных задач; - формулировать различные виды учебных задач и проектировать и решение в соответствии с уровнем познавательного и личностного развития детей младшего возраста; - осуществлять мониторинг и анализ современных психолого-педагогических и методических ресурсов для профессионального роста в области организации обучения обучающихся; - проектировать траекторию профессионального роста.
<p>В результате освоения дисциплины обучающийся должен знать:</p>	<ul style="list-style-type: none"> - актуальный профессиональный и социальный контекст, в котором приходится работать и жить; - основные источники информации и ресурсы для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте; - алгоритмы выполнения работ в профессиональной и смежных областях; методы работы в профессиональной и смежных сферах; - структуру плана для решения задач; порядок оценки результатов решения задач профессиональной деятельности; - номенклатура информационных источников, применяемых в профессиональной деятельности; приемы структурирования информации; - формат оформления результатов поиска информации, современные средства и устройства информатизации; порядок их применения и программное обеспечение в профессиональной деятельности в том числе с использованием цифровых средств; - сущность и виды учебных задач, обобщённых способов деятельности; - преемственные образовательные программы дошкольного, начального общего и основного общего образования;

	<ul style="list-style-type: none"> - пути достижения образовательных результатов; - образовательные запросы общества и государства в области обучения обучающихся.
--	--

Общие компетенции:

ОК 01	Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам
ОК 02	Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

Профессиональные компетенции:

ПК 1.1.	Проектировать процесс обучения на основе федеральных государственных образовательных стандартов, примерных основных образовательных программ начального общего образования
ПК 1.4.	Анализировать процесс и результаты обучения обучающихся
ПК 1.7.	Выстраивать траекторию профессионального роста на основе результатов анализа процесса обучения и самоанализа деятельности

1. Вопросы для подготовки к дифзачету (теоретические вопросы)

1. Множества.
2. Действия над множествами Пересечение множеств
3. Действия над множествами. Объединение множеств.
4. Действия над множествами. Разность множеств
5. Действия над множествами. Декартово произведение множеств.
6. Математические понятия
7. Виды определений. Требования к определению.
8. Высказывания
9. Высказывательные формы
10. Операции над высказываниями
11. Высказывания с кванторами
12. Умозаключения и их виды.
13. Виды доказательств
14. Основные формулы комбинаторики.
15. Случайная величина. Функция распределения случайной величины
16. Числовые характеристики случайных величин
17. Выборка. Характеристики выборки
18. Графическое представление выборки. Полигон. Гистограмма.
19. Числовые характеристики выборки

2. Задания в тестовой форме

Уважаемый студент! Вам предлагается выполнить 30 заданий в тестовой форме для контроля усвоенных знаний и практическое задание для оценки освоенных умений. Каждая часть дифзачета оценивается. Итоговая оценка складывается как среднее арифметическое двух заданий, с учетом текущей успеваемости по учебной дисциплине.

Задания для проверки усвоения знаний.

Критерии оценки тестовых заданий.

Правильный ответ на вопрос оценивается в 1 балл, неправильный ответ или его отсутствие – ноль баллов.

Оценка	Процент правильных ответов
5(отлично)	90% - 100%
4(хорошо)	80% - 89%
3(удовлетворительно)	79% - 70%
2(неудовлетворительно)	69% и менее

Время на выполнение заданий: 1 академический час.

I. Выберите один верный ответ

1. ИСТИННЫМ ВЫСКАЗЫВАНИЕМ ЯВЛЯЕТСЯ ЗАПИСЬ:

- а) 0 – натуральное число;
- б) $24:4+4=10$;
- в) $23 < 12$;
- г) 333 - четное число.

2. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ C и D ОБОЗНАЧАЮТ:

- а) $A \cap B$;
- б) $C \cup D$;
- в) $A \cup B$;
- г) $C \cap D$.

3. ВЫСКАЗЫВАНИЕМ НЕ ЯВЛЯЕТСЯ ЗАПИСЬ:

- а) $(7 - 4) \cdot 5 > 10$;
- б) $6 \cdot 3 + 5 = 20$;
- в) $3x - 5 = 10$;
- г) 123 - четное число.

4. ЕСЛИ A – ИСТИННО И B – ЛОЖНО, ТО ВЫСКАЗЫВАНИЕ $A \vee B$:

- а) ложно;
- б) истинно;
- в) не определить;
- г) другой ответ.

5. $A = \{b, c, d, e\}$, $B = \{c, d, k\}$. ОБЪЕДИНЕНИЕМ МНОЖЕСТВ A И B ЯВЛЯЕТСЯ МНОЖЕСТВО:

- а) $\{c, d\}$;
- б) $\{b, e, k\}$;
- в) $\{b, c, d, e, k\}$;
- г) $\{k\}$.

6. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА ПОЯВЛЕНИЯ НЕСТАНДАРТНЫХ ДЕТАЛЕЙ В ПАРТИИ, ГДЕ ИЗ 500 ДЕТАЛЕЙ ОТДЕЛ ТЕХНИЧЕСКОГО КОНТРОЛЯ ОБНАРУЖИЛ 7 НЕСТАНДАРТНЫХ ДЕТАЛЕЙ:

- а) $0,07$;
- б) $0,35$;
- в) $0,014$;
- г) $0,035$.

7. К ПАРАЛЛЕЛОГРАММАМ ОТНОСЯТСЯ:

- а) квадрат, многоугольник, прямоугольник;
- б) прямоугольник, квадрат, ромб;
- в) квадрат, трапеция, ромб;
- г) ромб, прямоугольник, параллелепипед.

8. ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ C И K ОБОЗНАЧАЮТ:

- а) $A \cup B$;
- б) $C \cup K$;
- в) $C \cap K$;
- г) $A \cap B$.

9. ВЫСКАЗЫВАНИЕМ ЯВЛЯЕТСЯ ЗАПИСЬ:

- а) $4 - 3x < 9$;
- б) $6 : 2 + 5 > 4$;
- в) $7 + 2 \cdot x$;
- г) y – двузначное число.

10. ЕСЛИ A – ЛОЖНО И B – ИСТИННО, ТО ВЫСКАЗЫВАНИЕ $A \wedge B$:

- а) ложно;
- б) истинно;
- в) не определить;
- г) другой ответ.

11. $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, c, d, e\}$. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ X И Y , ЯВЛЯЕТСЯ МНОЖЕСТВО:

- а) $\{a, b, c, d, e\}$;
- б) $\{d, e\}$;
- в) $\{a, c\}$;
- г) $\{b\}$.

12. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА ПОЯВЛЕНИЯ НЕВСХОЖИХ СЕМЯН В ПАРТИИ, ГДЕ ИЗ 2500 СЕМЯН ПОДСОЛНЕЧНИКА 50 СЕМЯН НЕ ВОШЛИ:

- а) $0,02$;
- б) $0,05$;
- в) $0,01$;
- г) $0,025$.

13. ДАНО ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПОНЯТИЯ: «АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИЕЙ НАЗЫВАЕТСЯ ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, В КОТОРОЙ КАЖДЫЙ ЧЛЕН, НАЧИНАЯ СО ВТОРОГО, РАВЕН ПРЕДЫДУЩЕМУ, СЛОЖЕННОМУ С ОДНИМ И ТЕМ ЖЕ ЧИСЛОМ». ОНО ОПРЕДЕЛЕНО:

- а) генетическим способом
- б) через абстракцию
- в) индуктивным (рекурсивным) способом
- г) через ближайший род и видовые отличия.

14. БЛИЖАЙШИМ РОДОВЫМ ПОНЯТИЕМ ДЛЯ ПОНЯТИЯ «КВАДРАТ» БУДЕТ ПОНЯТИЕ:

- а) четырехугольник
- б) многоугольник
- в) прямоугольник
- г) параллелограмм

15. ИЗ ПРИВЕДЕННЫХ НИЖЕ ОПРЕДЕЛЕНИЙ ПРАВИЛЬНЫМ БУДЕТ:

- а) биссектрисой треугольника называется прямая, делящая угол треугольника пополам
- б) параллельными прямыми называются такие прямые, которые не пересекаются
- в) квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны
- г) касательной к окружности называется прямая, которая касается окружности

16. УМОЗАКЛЮЧЕНИЕМ НАЗЫВАЕТСЯ:

- а) логическое действие, в результате которого из одного или нескольких суждений получается новое суждение
- б) посылка (исходное суждение)
- в) вывод или заключение (новое суждение)
- г) нет правильного ответа

17. СТЕПЕНЬ РАССЕЙВАНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ОЦЕНИВАЕТ:

- а) математическое ожидание;
- б) дисперсия;
- в) плотность вероятности;
- г) интегральная функция распределения.

18. ПО СТАТИСТИЧЕСКОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ВЫБОРКИ

x_i	1	2	3
n_i	2	5	6

ЕЁ ОБЪЕМ РАВЕН:

- а) 30;
- б) 25;
- в) 11;
- г) 13.

19. ИЗ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ ИЗВЛЕЧЕНА ВЫБОРКА ОБЪЕМА $n = 50$:

x_i	1	2	3	4
n_i	20	8	12	n_4

ТОГДА n_4 РАВЕН:

- а) 8;
- б) 40;
- в) 10;
- г) 50.

20. В СТУДЕНЧЕСКОЙ ГРУППЕ ИЗ 20 ЧЕЛОВЕК ВЫБИРАЮТ СТАРОСТУ, ПРОФОРГА И ФИЗОРГА. КОЛИЧЕСТВО СПОСОБОВ ВЫБОРА РАВНО:

- а) 104
- б) 824
- в) 60
- г) 6840

II. Выберите нескольких ответов

21. К ОПРЕДЕЛЕНИЯМ ПРЕДЪЯВЛЯЮТСЯ ТРЕБОВАНИЯ:

- а) соразмерность
- б) отсутствие логического круга
- в) использование ближайшего рода
- г) четкость

22. ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ЯВЛЯЮТСЯ МНОЖЕСТВА $\{1,2,3\}$ И:

- а) $\{2,3,4,5\}$
- б) $\{4,5,6\}$
- в) $\{1,3\}$
- г) $\{1,2,3,4,5\}$

23. ЕСЛИ МНОЖЕСТВО СОСТОИТ ИЗ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, МЕНЬШИХ 5, ТО ЕГО ЭЛЕМЕНТАМИ ЯВЛЯЮТСЯ:

- а) $\dots, 0, 1, 2, 3, 4$
- б) $0, 1, 2, 3, 4, 3, 4$
- в) $1, 2, 3, 4$
- г) $1, 2, 3, 4, 5$

24. ВЫЯСНИТЕ, В КАКИХ СЛУЧАЯХ ИСТИННО ВЫСКАЗЫВАНИЕ:

«ПОНЯТИЕ A ЯВЛЯЕТСЯ ВИДОВЫМ ПО ОТНОШЕНИЮ К ПОНЯТИЮ B », ЕСЛИ:

- а) A : «насекомое», B : «животное»;
- б) A : «книга», B : «глава книги»;
- в) A : «лист», B : «растение»;
- г) A : «треугольник», B : «многоугольник».

25. ОСНОВНЫМИ ЗАДАЧАМИ СТАТИСТИКИ НА СОВРЕМЕННОМ ЭТАПЕ ЯВЛЯЮТСЯ:

- а) исследование преобразований экономических и социальных процессов в обществе;
- б) анализ и прогнозирование тенденций развития экономики;
- в) регламентация и планирование хозяйственных процессов;
- г) объединение данных в группы по времени регистрации.

26. ОСНОВНЫЕ СТАДИИ ЭКОНОМИКО-СТАТИСТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ВКЛЮЧАЮТ:

- а) сбор первичных данных,
- б) статистическая сводка и группировка данных,
- в) контроль и управление объектами статистического изучения,
- г) анализ статистических данных

27. ТЕРМИН РЕГРЕССИЯ В СТАТИСТИКЕ ПОНИМАЮТ КАК:

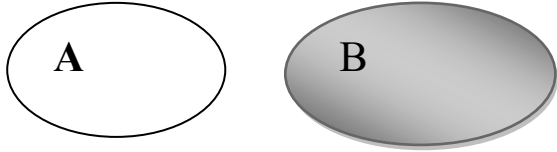
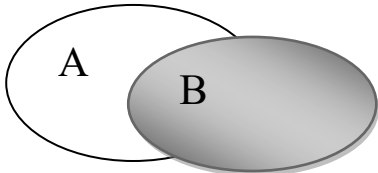
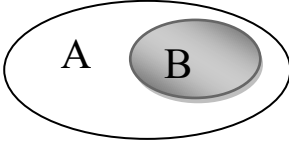
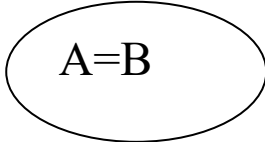
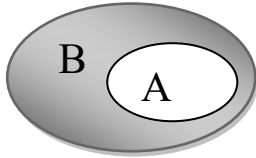
- а) функцию связи, зависимости;
- б) направление развития явления вспять;
- в) функцию анализа случайных событий во времени;
- г) уравнение линии связи

28. КАКИЕ ИЗ ДАННЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ ИСТИННЫ:

- а) Животные делятся на птиц и зверей.
- б) Ягоды бывают съедобные и несъедобные.
- в) Четырехугольники делятся на квадраты, ромбы, прямоугольники и трапеции.
- г) Треугольники делятся на равнобедренные, равносторонние и разносторонние.

III. Установите соответствие

29. Установите соответствие между множествами и их изображениями:

МНОЖЕСТВА		ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ	
1.	A – параллелограммы; B – прямоугольники	а)	
2.	A – ромбы; B – прямоугольники	б)	
3.	A – квадраты; B – ромбы	в)	
4.	A – правильные четырехугольники; B – квадраты	г)	
		д)	

30. Установите соответствие между предложением и его логической структурой:

Наименование множества		Наименование множества	
1.	$x \geq 7$	а)	A и B
2.	В равнобедренном треугольнике углы при основании равны	б)	A или B
3.	Неверно, что число 17 делится на 3	в)	не A
4.	Число 24 делится на 2 и на 3	г)	если A , то B
		д)	не A и не B

Задания для проверки освоения умений.

Уважаемый студент! Вам предлагается выполнить практическое задание.

Критерии оценки практического задания.

Оценка	Критерий
5(отлично)	Правильно даны 4 ответа
4(хорошо)	Правильно даны 3 ответа
3(удовлетворительно)	Правильно даны 2 ответа
2(неудовлетворительно)	Правильно дан 1 ответ

Время на выполнение заданий: 1 академический час.

3. Практическое задание

ПРОВЕДИТЕ СТАТИСТИЧЕСКУЮ ОБРАБОТКУ ИНФОРМАЦИИ

В результате тестирования группа студентов набрала баллы: 5,3,0,1,4,2,5,1,4,5.

- Составьте вариационный ряд данных.
- Составьте статистический ряд.
- Постройте полигон частот по полученным данным.
- Найдите выборочное среднее.

1. Ответы на теоретические вопросы

1. Множества

Множество – это совокупность объектов (элементов), которые понимаются как единое целое (по тем или иным признакам, критериям или обстоятельствам). Причём, это не только материальные объекты, но и буквы, цифры, теоремы, мысли, эмоции и т. д.

Обычно множества обозначаются большими латинскими буквами A, B, C, \dots, X, Y, Z (как вариант, с подстрочными индексами: A_1, A_2, B_7 и т. п.), а его элементы записываются в фигурных скобках, например:

$A = \{a, б, в, \dots, э, ю, я\}$ – множество букв русского алфавита; $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ – множество натуральных чисел;

$S_1 = \{Аня, Ваня, Таня, Петя, Юля, Галя\}$ – множество студентов в 1-м ряду

Множества A и S_1 являются *конечными* (состоящими из конечного числа элементов), а множество N – это пример *бесконечного* множества. Кроме того, в теории и на практике рассматривается так называемое *пустое множество*:

\emptyset – множество, в котором нет ни одного элемента.

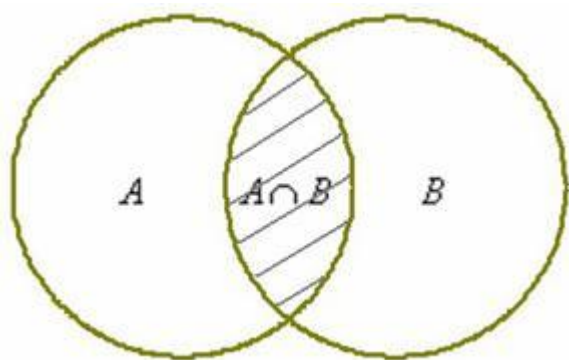
Множество G является **подмножеством** множества A , если каждый элемент множества G принадлежит множеству A . Иными словами, множество G содержится во множестве A : $G \subset A$

2. Действия над множествами. Пересечение множеств.

Пересечение множеств характеризуется логической связкой **И** и обозначается значком \cap

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, каждый элемент которого принадлежит **и** множеству A , **и** множеству B .

Пересечение – это общая часть множеств:



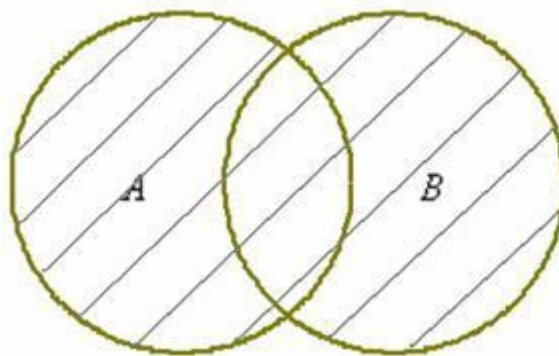
Так, например, для множеств $A = \{i, j, k\}$, $B = \{k, m\}$: $A \cap B = \{k\}$

Если у множеств нет одинаковых элементов, то их пересечение пусто.

3. Действия над множествами. Объединение множеств

Объединение множеств характеризуется логической связкой **ИЛИ** и обозначается значком \cup

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, каждый элемент которого

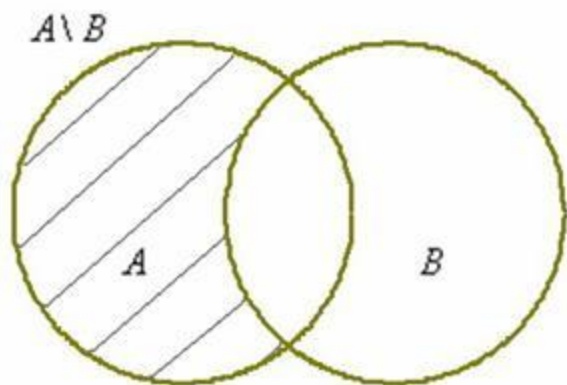


принадлежит множеству A **или** множеству B :

Запишем объединение множеств $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$. $A \cup B = \{-1, 0, 1, 3, 5\}$ – тут нужно перечислить все элементы множеств A и B , причём одинаковые элементы (в данном случае единица на пересечении множеств) следует указать один раз.

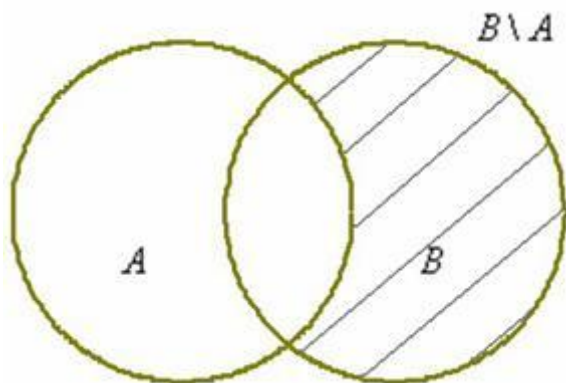
4. Действия над множествами. Разность множеств

Разностью множеств A и B называют множество $A \setminus B$, каждый элемент которого принадлежит множеству A и не принадлежит множеству B :



Разность $A \setminus B$ читаются следующим образом: «а без бэ». И рассуждать можно точно так же: рассмотрим множества $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, a, d, 5\}$. Чтобы записать разность $A \setminus B$, нужно из множества A «выбросить» все элементы, которые есть во множестве B : $A \setminus B = \{b, c\}$

Зеркально: **разностью** множеств B и A называют множество $B \setminus A$, каждый элемент которого принадлежит множеству B и не принадлежит множеству A :



Для тех же множеств $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, a, d, 5\}$ $B \setminus A = \{1, 5\}$ – из множества B «выброшено» то, что есть во множестве A .

Кроме того, иногда рассматривают *симметрическую разность* $A \Delta B$, которая объединяет оба «полумесяца»: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ – иными словами, это «всё, кроме пересечения множеств».

5. Действия над множествами. Декартово произведение множеств

Декартовым (прямым) произведением множеств A и B называется множество $A \times B$ всех упорядоченных пар (a, b) , в которых элемент $a \in A$, а элемент $b \in B$

Запишем декартово произведение множеств $A = \{d, 5, f\}$, $B = \{-1, d\}$.
 $A \times B = \{(d, -1), (d, d), (5, -1), (5, d), (f, -1), (f, d)\}$ – перечисление пар удобно осуществлять по следующему алгоритму: «сначала к 1-му элементу множества A последовательно присоединяем каждый элемент множества B , затем к 2-му элементу множества A присоединяем каждый элемент множества B , затем к 3-му элементу множества A присоединяем каждый элемент множества B »:
 $A \times B = \{(\underline{d}, \underline{-1}), (\underline{d}, \underline{d}), (\underline{5}, -1), (\underline{5}, d), (\underline{f}, -1), (\underline{f}, d)\}$

Зеркально: **декартовым произведением** множеств B и A называется множество $B \times A$ всех упорядоченных пар (b, a) , в которых $b \in B$, $a \in A$. В нашем примере:
 $B \times A = \{(-1, d), (-1, 5), (-1, f), (d, d), (d, 5), (d, f)\}$ – здесь схема записи аналогична: сначала к «минус единице» последовательно присоединяем все элементы множества A , затем к «дэ» – те же самые элементы:
 $B \times A = \{(\underline{-1}, d), (\underline{-1}, 5), (\underline{-1}, f), (\underline{d}, d), (\underline{d}, 5), (\underline{d}, f)\}$

6. Математические понятия

Понятие – это форма мышления, в которой отражены существенные (отличительные) свойства объектов изучения.

Содержание понятия – это множество всех существенных признаков данного понятия.

Объем понятия – множество объектов, к которым применимо данное понятие.

Если объем одного понятия содержится в объеме другого понятия, то второе понятие называется **родовым** по отношению к первому понятию, а первое называется **видовым** по отношению ко второму. Чем больше объем понятия, тем беднее содержание и наоборот.

Классификация понятия – процесс выяснения объема понятия; разделение множества объектов, составляющих объем родового понятия, на виды.

Основные методы введения математических понятий:

Конкретно-индуктивный метод.

Абстрактно-дедуктивный метод.

7. Виды определений. Требования к определению

Понятие может быть правильно **определено** различными способами:

Через ближайший род и видовое отличие.

К отысканию ближайшего рода следует стремиться потому, что в таком случае мы подходим ближе к определяемому понятию, его объему и благодаря этому уменьшается совокупность видовых признаков в определении.

Пример: квадрат – прямоугольник с равными сторонами; ромб – параллелограмм, у которого диагонали взаимно перпендикулярны.

Генетическое.

Генетическое определение показывает, как возникает, образуется данный предмет или явление.

Пример: окружность – множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной точки, лежащей в этой плоскости.

Индуктивные.

Существуют *рекуррентные* или *индуктивные* определения (арифметическая и геометрическая прогрессии), когда указывается способ получения нового, кроме первого, члена через предыдущий.

Пример: рекуррентное равенство $a = a + d$ определяет арифметическую прогрессию.

Через абстракцию.

Определения, раскрывающие значение термина путем такого перечисления объектов, которое создает представление об объеме и содержании понятия. Например: «Натуральный ряд чисел – это 1, 2, 3, и т.д.».

Пример: натуральное число – характеристика класса эквивалентных конечных множеств.

Отметим еще правила построения определения: 1) оно должно быть полным и точным, четким и ясным; 2) нельзя определять понятие через неизвестное понятие или неизвестный признак; 3) нельзя допускать логического круга: А определять через В, а В – через А; 4) избегать отрицательных определений, т.е. указаний на то, чем определяемый объект не обладает (например, определение «нечетная функция есть функция не являющаяся четной» не будет верным определением, поскольку существуют функции которые не являются ни четными, ни нечетными)

8. Высказывания

Предложением мы будем называть любое соединение слов, имеющее самостоятельный смысл. Например:

а) Стой!; б) Прекрасная погода, не так ли?; в) $3 > 1$;

д) Всякий прямоугольник есть квадрат; е) Если $a > b$, то $b < a$.

Из двух предложений можно образовать новые предложения, используя для этого союзы “и”, “или”, “если....,то....”, “тогда и только тогда”, и др. С помощью частицы “не” или словосочетания “неверно, что” можно из данного предложения получить новое.

Слова “и”, “или”, “если....,то....”, “тогда и только тогда, когда”, а также частицу “не” (“неверно, что”) называют **логическими связками**.

Предложения, образованные из других предложений с помощью логических связок, называют **составными**. Предложения, не являющиеся составными, называются **элементарными**. Элементарные высказывания обозначаются малыми буквами латинского алфавита: $x, y, z, \dots, a, b, c, \dots$; истинное значение высказывания цифрой 1, а ложное значение - цифрой 0.

Высказыванием называется предложение, относительно которого имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно.

В примере, рассмотренном выше, первые два предложения высказываниями не являются.

Каждому высказыванию придадим значение истинности: *И* (истина), если это истинное высказывание, и *Л* (ложь), если это ложное высказывание. Ввиду того, что нас будет интересовать не содержание высказывания, а значение его истинности, высказывания (с) и (е), хотя и различного содержания, для нас будут тождественны, т. к. каждое из них имеет значение *И*.

9. Высказывательные формы

Предложение, содержащее хотя бы одну переменную и становящееся высказыванием при подстановке вместо переменной ее значения, называется высказывательной формой.

Одноместной высказывательной формой, заданной на множестве X , называется предложение с переменной, которое обращается в высказывание при подстановке в него значений переменной из множества X .

Высказывательные формы принято обозначать: $A(x), B(x), \dots$.

X – область определения высказывательной формы, множество тех значений переменной, которые можно подставить в высказывательную форму.

Среди всех возможных значений переменной в первую очередь интересны те, которые обращают высказывательную форму в истинное высказывание. Множество таких значений переменной называют множеством истинности высказывательной формы.

10. Операции над высказываниями

Отрицание. Отрицанием высказывания a называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание a ложно, и ложным, если высказывание a истинно. Отрицание высказывания a обозначается \bar{a} и читается «не a » или «неверно, что a ».

Конъюнкция. Конъюнкцией (логическим умножением) двух высказываний a и b называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания a и b истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно. Конъюнкция высказываний a и b обозначается символом $a \wedge b$, читается « a и b ». Высказывания a и b называются членами конъюнкции.

Дизъюнкция. Дизъюнкцией (логическим сложением) двух высказываний a и b называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний a , b истинно, и ложным, если они оба ложны. Дизъюнкция высказываний a , b обозначается символом « $a \vee b$ », читается « a или b ». Высказывания a , b называются членами дизъюнкции.

Импликация. Импликацией двух высказываний a и b называется новое высказывание, которое считается ложным, если a истинно, а b – ложно, и истинным во всех остальных случаях. Импликация высказываний a , b обозначается символом $a \rightarrow b$, читается «если a , то b » или «из a следует b ». Высказывание a называют условием или посылкой, высказывание b – следствием или заключением, высказывание $a \rightarrow b$ следованием или импликацией.

Эквивалентность. Эквивалентностью двух высказываний a и b называется новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания a, b либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях. Эквивалентность высказываний a, b обозначается символом $x \equiv y$, читается «для того, чтобы a , необходимо и достаточно, чтобы b » или « a тогда и только тогда, когда b », или «для того, чтобы a , необходимо и достаточно, чтобы b ».

11. Высказывания с кванторами

Чтобы из высказывательной формы получить высказывание можно:

1. Вместо переменной подставить ее значение.
2. В высказывательную форму добавить квантор.

Квантор – это слово, которое показывает, о скольких (всех или некоторых) объектах идет речь в предложении.

Различают кванторы общности и существования.

Кванторы общности – это слова “любой”, “всякий”, “каждый”, “все”.

Обозначение квантора общности: $\forall x$.

Кванторы существования – это слова “существует”, “некоторые”, “найдется”, “хотя бы один”.

Обозначение квантора существования: $\exists x$.

Правила построения отрицаний высказываний с кванторами

Отрицание высказывания с квантором можно построить двумя способами:

1. Поставить перед высказыванием слова “неверно, что”;
2. Для того, чтобы построить отрицание высказывания с квантором общности (существования), достаточно заменить его квантором существования (общности) и построить отрицание предложения, стоящего после квантора, т.е.

$$\overline{\forall(x)A(x)} = \exists(x) \overline{A(x)};$$

$$\overline{\exists(x)A(x)} = \forall(x) \overline{A(x)}.$$

Кванторы \exists и \forall могут использоваться и для любого числа переменных.

12. Умозаключения и их виды

Умозаключение — форма мышления, в которой из одного или нескольких суждений на основании определенных правил вывода получается новое суждение, с необходимостью или определенной степенью достоверности следующее из них. Умозаключения состоят из *посылок* и *заключения*.

Посылки – это *высказывания, содержащие исходные данные*.

Заключение – это *высказывание, содержащее новое знание, полученное из исходных*.

Логический переход от посылок к заключению - вывод.

Дедуктивным называется умозаключение, в котором посылки и заключение находятся в отношении логического следования.

$A_1, A_2, \dots, A_n \Rightarrow B$ или $(A_1, A_2, \dots, A_n) / B$

Неполная индукция – это умозаключение, в котором на основании того, что некоторые объекты класса обладают определенным свойством, делается вывод о том, что этим свойством обладают все объекты данного класса

Выводы, полученные с помощью неполной индукции, носят характер предположения и нуждаются в дальнейшей проверке: их надо либо доказать, либо опровергнуть.

Аналогия – это умозаключение, в котором на основании сходства двух объектов в некоторых признаках и при наличии дополнительного признака у одного из них делается вывод о наличии такого же признака у другого объекта.

Вывод по аналогии носит характер предположения, поэтому нуждается либо в доказательстве, либо в опровержении.

Полная индукция - это умозаключение, в котором вывод делается на основе рассмотрения всех частных и возможных случаев.

13. Виды доказательств

Доказать какое-либо утверждение - это значит показать, что это утверждение логически следует из системы истинных и связанных с ним утверждений.

По способу ведения (т.е. по форме) различают: *прямые и косвенные* доказательства.

Прямые доказательства строятся на основе дедуктивных умозаключений.

К *косвенным* относятся доказательства *методом от противного* и доказательство *на основе закона контрапозиции*.

Сущность метода от противного заключается в следующем:

- пусть требуется доказать теорему $A \rightarrow B$;

- допускаем, что заключение теоремы (B) - ложно, следовательно его отрицание \overline{B} - истинно;

- присоединяем предположение \overline{B} условию;

- строим цепочку дедуктивных умозаключений до тех пор, пока не получим утверждение, противоречащее условию;

- делаем вывод о том, что полученное противоречие доказывает истинность теоремы $A \rightarrow B$.

14. Основные формулы комбинаторики

Выборка называется упорядоченной, если в ней задан порядок следования элементов. Если порядок следования элементов несущественен, то выборка называется неупорядоченной.

Из определения следует, что две упорядоченные выборки, состоящие из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке, являются различными.

Перестановки. Упорядоченные выборки, объемом N из N элементов, где все элементы различны, называются перестановками из N элементов. Число перестановок из N элементов обозначается P_n . $P = N!$

Размещения. Упорядоченные выборки объемом M из N элементов ($M < N$), где все элементы различны, называются размещениями. Число размещений из N элементов

по M обозначается A_n^m . $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Сочетания. Неупорядоченные выборки объемом M из N элементов ($M < N$) называются

сочетаниями. Их число обозначается C_n^m . $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

15. Случайная величина. Функция распределения случайной величины

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно возможное значение, наперёд неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Выпадение некоторого значения случайной величины x_i . это случайное событие:

$X = x_i$. Среди случайных величин выделяют дискретные и непрерывные случайные величины.

Дискретной случайной величиной называется случайная величина, которая в результате испытания принимает отдельные значения с определёнными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным и бесконечным. Примеры дискретной случайной величины: запись показаний спидометра или измерений температуры в конкретные моменты времени.

Непрерывной случайной величиной называют случайную величину, которая в результате испытания принимает все значения из некоторого числового промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Пример непрерывной случайной величины: запись показаний спидометра или измерений датчика температуры в течение конкретного интервала времени.

Любая случайная величина имеет свой закон распределения вероятностей и свою функцию распределения вероятностей. Прежде, чем дать определение функции распределения, рассмотрим переменные, которые её определяют. Пусть задано некоторое x – действительное число и получена случайная величина X , при этом ($x > X$). Требуется определить вероятность того, что случайная величина X будет меньше этого фиксированного значения x .

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение меньшее значения x , то есть:

$$F(x) = P(X < x),$$

где x – произвольное действительное число.

16. Числовые характеристики случайных величин

Случайная величина (непрерывная или дискретная) имеет численные характеристики:

1. Математическое ожидание $M(X)$. Эту характеристику можно сравнивать со средним арифметическим наблюдаемых значений случайной величины X .

2. Дисперсия $D(X)$. Это характеристика отклонения случайной величины X от математического ожидания.

3. Среднее квадратическое отклонение $s(X)$ для дискретной и непрерывной случайной величины X – это корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}.$$

17. Выборка. Характеристики выборки

Генеральной совокупностью называют полный набор всех возможных N значений дискретной случайной величины X . Практически сложно получить полную информацию о случайной величине. Поэтому случайным образом отбирают объекты, которые называется **выборкой**, при этом число – n называется **объёмом выборки**.

Статистическим распределением выборки или **статистическим рядом** называют перечень вариантов и соответствующих им частот или относительных частот.

Последовательность вариантов, записанных в возрастающем порядке (вся строка x_i) называется **вариационным рядом**. Число наблюдений n_i называют **частотами**, i – номер варианты.

18. Графическое представление выборки. Полигон. Гистограмма.

Табличные данные могут быть представлены графически в виде полигона или гистограммы. Если выборка задана в виде отдельных точек, а не интервалов, тогда строят полигон частот.

Полигоном частот называется ломаная, отрезки которой соединяют точки $(x_i; n_i/n)$.

Если выборка задана в виде интервалов, тогда строят гистограмму.

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат интервалы x_i , их высоты равны $p_i = n_i/n$ (плотности относительной частоты).

19. Числовые характеристики выборки

Пусть x_1, x_2, \dots, x_n – выборка из генеральной совокупности объема n .

Выборочной средней (или *средним значение выборки*) называется среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности.

Если все значения x_1, x_2, \dots, x_n признака выборки объема n различны, то

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$
. Если все значения признака x_1, x_2, \dots, x_k имеют соответственно частоты n_1, n_2, \dots, n_k , причем $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, то

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i.$$

Если дано распределение непрерывной случайной величины, то вместо x_i , берут середину

интервала, т.е. $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

Выборочной дисперсией называется среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений выборки от их среднего значения \bar{x} .

Если все значения x_1, x_2, \dots, x_n признака выборки объема n различны, то

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Если все значения признака x_1, x_2, \dots, x_k имеют соответственно частоты n_1, n_2, \dots, n_k , причем $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, то

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2.$$

Для вычисления выборочной дисперсии можно пользоваться формулой:

$$D_B = \overline{x^2} - \bar{x}^2.$$

Выборочная дисперсия имеет систематическую ошибку, приводящую к уменьшению дисперсии. Чтобы это устранить вводят поправку, умножая D_B на $\frac{n}{n-1}$. В результате получают *исправленную* (или *модифицированную*) дисперсию:

$$D_B = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 .$$

Кроме дисперсии для характеристики рассеяния значений признака выборочной совокупности вокруг своего среднего значения пользуются сводной характеристикой – средним квадратичным отклонением.

Выборочным средним квадратичным отклонением (стандартом) называют квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} .$$